MATHÉMATIQUES, ANALYSE

1) Soit $n \geq 1$ un entier. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire défini par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Nous notons $\|\cdot\|$ la norme définie par $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Alors $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, l'espace des matrices carrées $n \times n$, est muni de la norme

$$\|T\|_2 = \sup_{x\in\mathbb{R}^n, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

Etant donnée T dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, nous notons T^* la matrice adjoint (ou la transposée) de T.

a) Prouver que $\|ST\|_2 \leq \|S\|_2 \|T\|_2$, $\|T^*\|_2 = \|T\|_2$ et $\|T^*T\|_2 = \|T\|_2^2$.

b) Supposons pour cette question uniquement que $T^* = T$. Montrer que, pour tout entier N dans $\mathbb{N}$,

$$\left\|T^N\right\|_2 = \|T\|_2^N .$$

c) Déduire que pour tout T dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout entier N dans $\mathbb{N}$,

$$\left\|\left(T^*T\right)^N\right\|_2 = \|T\|_2^{2N} .$$

2) Considérons une suite $(T_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ de matrices dans $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$. Supposons qu'il existe une fonction $\omega\colon \mathbb{Z} \to]0, +\infty[$ tell que $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \omega(i) < +\infty$ et telle que, pour toute paire $(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$,

$$\sqrt{\left\|T_j^* T_k\right\|_2} \leq \omega(j-k), \tag{1}$$

$$\sqrt{\left\|T_j T_k^*\right\|_2} \leq \omega(j-k). \tag{2}$$

Le but de cette question est de montrer que, pour tout sous-ensemble fini $F \subset \mathbb{Z}$,

$$\left\|\sum_{j\in F} T_j\right\|_2 \leq \sigma \quad \text{où} \quad \sigma = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \omega(i). \tag{3}$$

a) Prouver que $\|T_j\|_2 \leq \omega(0)$ pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

b) Fixons un entier $N \geq 1$ et un sous-ensemble fini F de $\mathbb{Z}$. Notons $I = F^{2N} = \overbrace{F \times \cdots \times F}^{2N \text{ fois}}$ l'ensemble des $(2N)$-uplets d'entiers dans F. Prouver que, pour tout $(i_1, i_2, \ldots, i_{2N}) \in I$, on a

$$\left\|T_{i_1}^* T_{i_2} T_{i_3}^* T_{i_4} \cdots T_{i_{2N-1}}^* T_{i_{2N}}\right\|_2 \leq \omega(0)\omega(i_1 - i_2)\omega(i_2 - i_3)\cdots\omega(i_{2N-2} - i_{2N-1})\omega(i_{2N-1} - i_{2N}).$$

c) Rappelons la notation $\sigma = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \omega(i)$. Montrer que

$$\sum_{i_1}\sum_{i_2}\cdots\sum_{i_{2N-1}}\sum_{i_{2N}} \left\|T_{i_1}^* T_{i_2}\cdots T_{i_{2N-1}}^* T_{i_{2N}}\right\|_2 \leq (\mathrm{card\,F})\sigma^{2\mathrm{N}}$$

où la sommation est prise sur tous les $(2N)$-uplets $(i_1, i_2, \ldots, i_{2N-1}, i_{2N}) \in I$.

d) Prouver que $U = \sum_{j\in F} T_j$ vérifie l'estimation (3).

3) Soit $K\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 vérifiant, pour une certaine constante $B > 0$,

i) $|K(x)| \leq B|x|^{-1}$ et la dérivée vérifie $|K'(x)| \leq B|x|^{-2}$ pour tout $x \neq 0$,

ii) $K(-x) = -K(x)$ pour tout $x \neq 0$.

a) Il est admis qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, de classe C^∞, telle que

1. $\varphi(x) = \varphi(-x)$;
2. $\varphi(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\varphi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$.

Pour tout j dans $\mathbb{Z}$ définissons $K_j(x)$ par $K_j(x) = \big(\varphi(2^{-j}x) - \varphi(2^{1-j}x)\big)K(x)$. Prouver que

$$\int_{\mathbb{R}} K_j(x)\,dx = 0, \qquad \sup_{j\in\mathbb{Z}}\sup_{x\in\mathbb{R}} 2^{2j}\left|K_j'(x)\right| < +\infty,$$
$$\sup_{j\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}} |K_j(x)|\,dx < +\infty, \quad \sup_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-j}\int_{\mathbb{R}} |x|\,|K_j(x)|\,dx < +\infty.$$

b) Etant donnés deux entiers j, k dans $\mathbb{Z}$ avec $j \geq k$, posons

$$K_{j,k}(x) = \int_{\mathbb{R}} K_k(y)K_j(x+y)\,dy.$$

Prouver qu'il existe une constante C_1 (indépendante de j, k, x) telle que $|K_{j,k}(x)| \leq C_1 2^{k-2j}$. Déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} |K_{j,k}(x)|\,dx \leq C_2 2^{-|j-k|}$$

pour une constante positive C_2 indépendante de j et k.